"MATRICES, SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y LA ELIMINACIÓN DE GAUSS-JORDAN"

Hola. Bienvenidos al segundo capítulo de la "Guía para entender las Matrices", titulado "Matrices, sistemas de

ecuaciones lineales y la eliminación de Gauss-Jordan".

En este capítulo les explico qué es un sistema de ecuaciones lineales, cómo se resuelve y por qué es útil representarlo con una matriz.

---

¿Qué es una ecuación lineal?

Es cuando tienes variables, llamadas "incógnitas", multiplicadas por unos números, llamados "coeficientes", y estas incógnitas multiplicadas por los coeficientes se suman, y todo esto es igual a una "constante". Por ejemplo, 3x + 2y = 5 es una ecuación lineal. x e y son las incógnitas, y estánsiendo multiplicadas por los números 3 y 2 respectivamente, que son los coeficientes. La suma de 3x y 2y está siendo igualada a la constante 5.

Al lado izquierdo de la ecuación también se le llama "combinación lineal". Una combinación lineal es cuando tienes varios elementos, en este caso nuestras incógnitas, cada uno multiplicado o "escalado" por un coeficiente, y luego se suma todo.

La idea de estas ecuaciones es buscar todos los valores que pueden tener las incógnitas y que hagan verdadera la igualdad. ¿qué valores pueden tener x e y, para que la igualdad sea verdadera?

Partamos con un ejemplo más simple: una ecuación lineal con una sola incógnita, 2x = 3. ¿Cuál es el valor de x que hace

verdadera la igualdad? Para averiguarlo, solo hay que dividir ambos lados por 2 y encontramos que x = 3/2 es el valor que

buscamos. x = 3/2 es la solución a la ecuación lineal, y en este caso es la única solución.

Ahora, ¿qué pasa cuando hay más variables? Por ejemplo, en x + 2y = 2, ¿qué valores de x e y hacen verdadera la igualdad?

Para averiguarlo, puedes despejar una de las variables en función de la otra. Por ejemplo, si quieres despejar y, puedes

primero restar 3x a ambos lados y luego dividir por 2 para obtener y = (1/2)x + 1.

Fíjate que en este caso puedes ingresar cualquier valor para x y conseguir un valor de y. Si x = 0, entonces y = 1, por lo

que x = 0 e y = 1 son una solución de la ecuación. O si x = 1, entonces y = 1/2, así que x = 1 e y = 1/2 es otra solución

de la ecuación. Como puedes elegir cualquier valor para x, y encontrar un valor de y que le corresponda, resulta que a

diferencia del ejemplo anterior, donde había una única solución, esta nueva ecuación lineal tiene infinitas soluciones,

y todas son de la forma y = (1/2)x + 1.

Todas estas soluciones se pueden graficar en un plano cartesiano. Si dibujamos todos los puntos que solucionan la ecuación

x + 2y = 2, el gráfico resultante es la siguiente línea recta. Todos los puntos de esta recta son una solución de la

ecuación. Por ejemplo, los puntos (0, 1) y (1, 1/2) que encontramos recién pertenecen a esta recta.

Grafiquemos las soluciones de una segunda ecuación, -2x + 3y = 3. De nuevo, el gráfico va a ser una línea recta. Todos

los puntos de esta recta azul solucionan la ecuación -2x + 3y = 3.

Ahora, si te fijas, existe un punto que pertenece a las dos rectas a la vez. Este sería el punto (0, 1), donde se

intersectan las rectas.

El punto (0, 1) pertenece a ambas rectas al mismo tiempo, lo que significa que este punto es una solución de ambas

ecuaciones a la vez.

Puedes tomar dos o más ecuaciones y juntarlas en un mismo grupo, buscando encontrar valores que solucionen todas

a la vez. Este grupo se conoce como "sistema de ecuaciones". Al ser ecuaciones lineales, es un "sistema de ecuaciones

lineales", y de nuevo, la idea es buscar todos los valores para las incógnitas que solucionen todas las ecuaciones

al mismo tiempo.

El gráfico ayuda un montón para encontrar el punto de manera visual, pero no siempre tenemos esa opción. Entonces, ¿cómo

resolvemos un sistema de ecuaciones lineales con álgebra?

---

Hay varias maneras de solucionar estos sistemas, pero hoy veremos un método en particular, conocido como "eliminación de

Gauss-Jordan". Antes de explicarlo, hay que mencionar que está basada en dos principios importantes:

El primero, es que si tienes una igualdad y multiplicas ambos lados por el mismo escalar, entonces el resultado es otra

igualdad. Si tienes que a = b, y multiplicas ambos lados por c, entonces resulta que ac = bc. Esta es otra igualdad.

Y el segundo principio es que si tienes dos igualdades y las sumas entre sí, el resultado es otra igualdad. Si tienes

que a = b y que c = d, entonces a + c = b + d: otra igualdad formada por la suma de igualdades.

Con ambos principios en mente, podemos aplicar este método. Tomemos el mismo sistema de antes: x + 2y = 2, y -2x + 3y = 3.

Si tomamos la primera ecuación y la multiplicamos por un escalar, se produce otra igualdad. Así que el paso 1 es

multiplicarla por un número conveniente. Necesitamos que ese x se transforme en un 2x, así que vamos a multiplicarla por 2,

y nos queda 2x + 4y = 4. ¿Por qué hicimos esto? Porque después vamos a sumar ambas ecuaciones y se va a cancelar el -2x de

abajo. Ahí verás de lo que hablo.

Ahora, en el paso 2, tomamos esta nueva ecuación y se la sumamos a la segunda. Recuerda que la suma de dos igualdades, es

otra igualdad. La gracia de esto es que al sumar el 2x de la primera con el -2x de la segunda, se cancelan, y nos queda

solamente la ecuación 7y = 7. Lo que ocurrió aquí fue que "eliminamos" las x, que es la idea de la eliminación de Gauss-Jordan.

Por eso multiplicamos antes por 2, para sumar ambas ecuaciones y cancelar una incógnita.

Ahora que tenemos 7y = 7, el paso 3 es tan fácil como despejar y de esta ecuación, multiplicando por 1/7 a ambos lados, y nos

queda que y debe ser igual a 1.

Ahora que conocemos el valor de y, ¿cuál es el valor que debe tomar x? Para averiguarlo, podemos hacer lo mismo de antes y

cancelar el 2y de arriba. Para eso, multiplicamos la segunda ecuación por -2 y se la sumamos a la primera.

Al hacer eso, se cancela nuestro 2y y nos queda simplemente que x debe ser igual a 0.

Por ende, en el sistema x + 2y = 2, y -2x + 3y = 3, su solución es x = 0, e y = 1. Puedes verificar esto reemplazando todas

las x por 0, y todas las y por 1.

---

Veamos un ejemplo más grande: tres ecuaciones lineales con tres incógnitas x, y, z. Debemos encontrar los valores de x, y y z

que resuelvan las tres ecuaciones a la vez. ¿Cómo resolvemos este sistema?

Usemos la eliminación de Gauss-Jordan.

Primero vamos a usar la primera ecuación para eliminar las x de las ecuaciones de abajo. Para eso, multiplicamos

esta ecuación por números convenientes, de manera que al sumar estas nuevas ecuaciones a las de abajo, se cancelen las x.

Ahora nuestras dos últimas ecuaciones tienen solamente dos incógnitas 'y' y 'z'.

Usamos la segunda ecuación para eliminar la y de la tercera.

Ahora tenemos la última ecuación con solo una incógnita: -4z = 12. Podemos despejar z multiplicando por -1/4.

Y obtenemos que z = -3.

Después de obtener el valor de z, lo usamos para eliminar las z de las dos ecuaciones de arriba.

Ahora en la segunda ecuación nos queda solamente una incógnita. Tenemos que 12y = 12. Multiplicando por 1/12, obtenemos

que y = 1.

Podemos usar este valor que recién encontramos, para eliminar la y de la primera ecuación.

Finalmente, nos queda la primera ecuación con una sola incógnita: 2x = 8. Multiplicando por 1/2, obtenemos que x = 4.

Por lo tanto, en este sistema que acabamos de analizar, la solución es: x = 4, y = 1, y z = -3.

De nuevo, puedes verificar esto reemplazando los valores en el sistema original.

---

Con la eliminación de Gauss-Jordan, puedes encontrar las soluciones de cualquier sistema de ecuaciones lineales.

Sin embargo, hay un problema "más o menos importante". Es tedioso ir copiando todo el rato las variables y los signos.

Al final, lo único que va cambiando todo este rato son los coeficientes y las constantes.

¿Y... si solamente anotamos esos coeficientes y constantes?

¿Por qué no, en vez de anotar el sistema completo, anotamos solamente los números que lo conforman en una "tabla"?

Esta "tabla" es lo que conocemos como "matriz", y lo que acabamos de hacer es representar nuestro sistema de ecuaciones

lineales a través de esta matriz.

Las matrices serían entonces arreglos o colecciones 2D de números, una especie de tabla que recopila los coeficientes y las

constantes del sistema. Cada columna representa algo distinto: en este caso, la primera columna contiene los coeficientes que

acompañan a las x, la segunda columna representa a las y, y la tercera a las z. La cuarta columna representaría a las

constantes. También dibujamos una línea vertical que separa a los coeficientes de las constantes, para distinguir bien estos

números.

La idea de anotar todos los números en una matriz es que puedas hacer exactamente lo mismo que en un sistema de ecuaciones

lineales, pero escribiendo menos. Observa: <procede a mostrar cómo se resuelve la matriz>

---

Para poder hacer esto, y resolver cualquier sistema aplicando nuestro método de eliminación sobre una matriz, hay que definir

3 operaciones básicas, llamadas "operaciones elementales fila". Estas operan sobre las filas de la matriz, y son las siguientes:

1. Intercambiar dos filas. Todavía no hemos usado nada parecido a esto, pero nos puede servir para después.

2. Multiplicar una fila completa por un escalar, y

3. Escalar una copia de una fila y sumársela a otra fila distinta.

Con esas tres operaciones, podemos aplicar el método de eliminación de Gauss sobre una matriz. Veamos un ejemplo: este sistema

de 4 ecuaciones lineales con 4 incógnitas x, y, z y w. Primero lo representamos con una matriz, anotando todos sus coeficientes

y constantes en el mismo orden. Y ahora aplicamos nuestro método.

---

El primer paso es seleccionar la primera fila y la primera columna de la matriz. En el caso improbable de que la primera columna

tenga solamente ceros, solo avanza a la primera que no sea completamente nula.

Ahora pasamos al segundo paso: usar la fila que seleccionamos para anular todos los coeficientes de la columna seleccionada

que estén debajo de nuestra fila. Para eso creamos copias de la fila, las escalamos por valores convenientes y se las sumamos

a las filas de abajo, de manera que los números de la columna se hagan 0. Ojo, que si necesitamos intercambiar filas, podemos

hacerlo. Ahora no lo necesitamos, así que simplemente vamos a anular los coeficientes de abajo.

Ahora que todos los coeficientes de abajo en la columna son 0, es momento de pasar al paso 3 y seleccionar la fila y columna

que siguen. De nuevo, si llegase a ocurrir que la columna es nula a partir de la fila seleccionada, podemos avanzar a la siguiente.

En este caso, esto no ocurre.

Como todavía no hemos llegado al final de la matriz, vamos a repetir el paso 2 con esta fila y columna. Así que de nuevo, usamos

esta nueva fila para anular todos los coeficientes de abajo en la columna. Pero mucho cuidado aquí. Si te fijas, aquí tenemos

un 0, y no nos sirve tener un 0 aquí porque no podemos anular los coeficientes de abajo con un 0. En este caso, podemos

intercambiar dos filas para arreglar esto. Puedes cambiar la fila seleccionada con cualquiera de las que esté abajo, y en este

caso voy a cambiarla con la tercera.

Ahora tenemos un -3, y con esto sí que se puede anular el coeficiente que queda.

Volvemos al paso 3 y avanzamos una fila y una columna.

Como todavía no llegamos al final, repetimos el paso 2. En este caso, hay un 2 y abajo hay un 1. Podrías escalar la fila por -1/2

para cancelar ese 1, pero te quedaría después un -13/2, y es medio incómodo trabajar con fracciones. En cambio, si intercambiáramos

las filas y dejáramos el 2 abajo, entonces habría que escalar por -2 y no tendríamos fracciones. Así que en este caso, es

conveniente hacer eso. Cambiamos las filas y cancelamos el 2 que nos queda abajo.

Volvemos al paso 3 y avanzamos una fila y una columna. Pero esta vez ya llegamos al final y no queda nada más que cancelar ahí abajo,

así que seguimos adelante.

En este punto, estamos ante lo que se conoce como "matriz escalonada". Básicamente es una matriz con forma de escalera invertida.

Está compuesta de escalones que avanzan una fila a la vez, y debajo de esos escalones hay solamente ceros. Como dato importante,

el primer coeficiente de cada escalón se llama "pivote". Estos "pivotes" van a ser centrales a lo que viene más adelante. Aunque,

ahora que la matriz está escalonada, técnicamente se puede dejar hasta aquí y recuperar el sistema que representa, y solo despejar

y sustituir para encontrar los valores fácilmente. O se puede continuar a la segunda fase de la eliminación de Gauss-Jordan.

En esta segunda fase, la idea es que cada pivote tenga el valor 1, y se anulen todos los coeficientes que estén arriba. Así que

lo primero que se debe hacer es seleccionar la fila que contenga al último escalón, al último pivote.

Ahora, en el paso 6, primero multiplicamos nuestra fila por un escalar, en este caso -1/15, para que nuestro pivote se haga 1.

Una vez hecho eso, usamos esta fila para anular todos los coeficientes por encima del pivote.

En el paso 7 seleccionamos la fila anterior a esa para volver a realizar el paso 6 sobre esta.

Ahora fíjate que este pivote ya es 1, así que no tenemos que hacerle nada a la fila. Solo tenemos que anular los coeficientes

de arriba, que casualmente son -1, así que tampoco tenemos que multiplicar esta fila por un escalar antes de sumarla a las

filas de arriba, para que lo de arriba se haga 0.

En el paso 7 volvemos a retroceder una fila, y volvemos a hacer el paso 6.

Aquí multiplicamos por -1/3 para que el pivote se haga 1, y luego multiplicamos por -2 y lo sumamos a la fila de arriba para anular

ese coeficiente.

Luego retrocedemos una fila otra vez y hacemos lo mismo. Y de nuevo, nuestro pivote ya es 1, así que no le hacemos nada, y no hay

más números arriba que anular. Ahora que se acabaron todas las filas, terminamos aquí.

Esta última matriz se conoce como "matriz escalonada reducida". Es un tipo especial de matriz escalonada, donde todos los pivotes

son 1 y todos los coeficientes arriba de los pivotes son 0. Estas matrices escalonadas reducidas te dan al tiro las soluciones

al sistema de ecuaciones lineales que representan. En este caso, en el sistema original las soluciones son x = 5, y = -3, z = 1 y

w = -6.

---

Y bueno, esto sería todo por este capítulo. En resumen, lo que viste fue qué son los sistemas de ecuaciones lineales, viste que

se pueden representar con una matriz con todos sus coeficientes y constantes, y también viste la eliminación de Gauss-Jordan,

un método para encontrar las soluciones de cualquier sistema de ecuaciones lineales y también para transformar cualquier matriz en

una matriz escalonada reducida.

Si quieres ejercitar esto, te recomiendo los videos de julioprofe y Matemáticas profe Alex. Estos canales tienen muchos ejercicios

sobre este tema.

En el próximo capítulo veremos algo aún más interesante: matrices, vectores y transformaciones lineales. Hasta pronto.